

Teorias newtonianas da gravitação com acoplamento variável

Edital:	Edital Piiic 2022/2023
Grande Área do Conhecimento :	Ciências Exatas e da Terra
Área do Conhecimento :	Física
Título do Projeto:	Aspectos observacionais de teorias da gravitação
Título do Subprojeto:	Teorias newtonianas da gravitação com acoplamento variável
Professor Orientador:	Júnior Diniz Toniato
Estudante :	André Pelais Oliveira

Resumo

Diversas foram as explicações para o movimento de corpos celestes ao longo dos séculos. O modelo de gravitação mais consolidado atualmente é baseado na Teoria da Relatividade Geral de Einstein proposto no início do século XX. Apesar da Relatividade Geral ser bem consolidada e tem se mostrado efetiva quando comparada aos dados observacionais, é válido buscar alternativas dentro da teoria de gravitação newtoniana para modelagem de problemas celestes, de modo que os efeitos relativísticos não são tão distinguíveis dos newtonianos. Em vista disso, o presente trabalho visou estudar uma classe de teorias newtonianas com acoplamento variável através da proposição de uma lagrangiana geral. Para a realização deste estudo foi feito um estudo dirigido dos fundamentos físicos e matemáticos da gravitação newtoniana e utilizou-se de teorias de perturbação para analisar a força gravitacional perturbada. Com isso, encontrou-se um potencial gravitacional efetivo que depende do potencial gravitacional clássico e de um potencial auxiliar também presente na Relatividade Geral. Assim, encontrou-se uma equação para a força em um sistema binário na qual a sua componente de perturbação foi utilizada para avaliar a influência na variação dos parâmetros orbitais através do método de variação de órbitas osculantes.

Palavras-chave: Teorias alternativas da gravitação. Gravitação newtoniana modificada. Testes gravitacionais.

1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) desenvolvida por Einstein descreve fenômenos gravitacionais com precisão através da curvatura gerada no espaço-tempo devido a presença de matéria e/ou energia. Desde a sua divulgação no meio acadêmico pode-se explicar problemas nos quais as teorias de gravitação newtonianas não explicavam, como o avanço do periélio de mercúrio e a mudança no período orbital de sistemas binários de acordo com a emissão de ondas gravitacionais.

Apesar da TRG estar em concordância com testes observacionais e ser capaz de descrever regimes gravitacionais de campos fracos e fortes, há anomalias que instigam a busca por mudanças na TRG de modo que seja possível descrever tais fenômenos. A expansão acelerada do universo e a rotação de galáxias com velocidades maiores do que

o esperado devido a quantidade de massa observada são corrigidas através da inclusão de conceitos como matéria escura e energia escura (RODRIGUES; HERNÁNDEZ-ARBOLEDA, 2021; REIS; SIFFERT, 2022; VELTEN, 2020).

Algumas das teorias alternativas de gravitação modificada atuais têm quebrado a correspondência com a gravitação newtoniana em campos fracos e baixas velocidades (LANDSBERG; BISHOP, 1975; MCVITTIE, 1978; DUVAL; GIBBONS; HORVATHY, 1991; CHRISTODOULOU; KAZANAS, 2018). Isso ocorre devido a dependência exponencial da distância nestas teorias, sendo introduzidos para corrigir o potencial gravitacional usual, gerando então um acoplamento gravitacional variável no espaço e no tempo, essa intensidade é mediada pela constante G . É possível então pensar em como a gravitação newtoniana pode ser alterada de modo que G seja variável.

Neste contexto, vários trabalhos foram desenvolvidos em busca dessa mudança na teoria newtoniana. Neste trabalho busca-se analisar a estrutura matemática e as implicações físicas de uma lagrangiana mais geral para dois potenciais em regime de campo fraco. Com isso, este subprojeto está inserido no contexto do projeto intitulado “Aspectos observacionais de teorias da gravitação” visando analisar uma classe de teorias newtonianas a G variável.

2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho foi de analisar, através de teorias de perturbação, uma classe de teorias alternativas da gravitação com um campo dinâmico acoplado a lagrangiana do campo gravitacional.

Com isso, foram propostos os seguintes objetivos específicos:

- Estudo dirigido sobre cálculo variacional e mecânica lagrangiana, para nivelamento do bolsista;
- Estudo de técnicas perturbativas em órbitas planetárias e cálculo do avanço do periélio orbital;
- Aplicação do conhecimento adquirido anteriormente ao caso de classes mais gerais de teoria gravitacional newtoniana a G variável;
- Elaboração de um artigo técnico-científico para publicação em revista especializada.

3 Embasamento teórico

Uma lagrangiana L é obtida através da diferença entre a energia cinética e a energia potencial de um sistema, sendo ela uma função a ser minimizada de acordo com o Princípio Variacional (THORNTON; MARION, 2011). Para avaliar a dinâmica do sistema utiliza-se a equação de Euler-Lagrange (1),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 ; j = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

na qual $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ é a lagrangiana do sistema de partículas, q_j são as coordenadas generalizadas, $\dot{q}_j = dq_j/dt$ as velocidades generalizadas e s o número de graus de liberdade do sistema. A partir daí, pode-se estender o conceito e as ferramentas físico-matemáticas desenvolvidas para o caso de um sistema de partículas para sistemas de campos, dando origem a Teoria Clássica de Campos (LEMOS, 2007), levando a Equação de Euler-Lagrange para vários campos em 3 dimensões, a saber, a equação (2) abaixo

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_\alpha)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0 ; \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

sendo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \vec{\nabla} \varphi_\alpha, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}, \vec{r}, t)$ é, formalmente, a densidade lagrangiana a ser tratada e φ_α são os campos. Assim, estes conceitos são utilizados para estudar diferentes lagrangianas para o campo gravitacional para encontrar sua equação dinâmica. Primeiramente utiliza-se o caso clássico da lagrangiana newtoniana, descrita como na equação (3),

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi}{2} + 4\pi G \rho \psi, \quad (3)$$

onde ρ é a densidade de matéria, ψ é o potencial gravitacional newtoniano e G é a constante gravitacional newtoniana. Substituindo (3) em (1) obtemos a equação (4) abaixo

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho, \quad (4)$$

que é a conhecida equação de Poisson, satisfeita pelo campo gravitacional newtoniano.

Com isso, pode-se progredir para o estudo de uma lagrangiana mais geral do campo gravitacional onde G passa a ser variável. O modelo a ser trabalhado deriva da lagrangiana (5), proposta por Fabris et al. (2021),

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi}{8\pi G_0} - \frac{\omega}{8\pi G_0} \left(\psi \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} - c^4 \vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} \sigma \right) + \rho \sigma \psi. \quad (5)$$

Neste caso temos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \sigma, \vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} \sigma, \dot{\sigma})$ uma densidade lagrangiana dependente de dois campos e suas primeiras derivadas, além de ω como uma constante de arbitrariedade. De modo análogo ao caso clássico substituímos (5) na Equação de Lagrange (1) e encontramos as equações dinâmicas (6) e (7),

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G_0 \rho \sigma - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \sigma - \frac{1}{\sigma c^4} \left[\psi \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{\dot{\sigma} \dot{\psi}}{\sigma} \right] = -\frac{4\pi G_0 \psi}{\omega c^4}. \quad (7)$$

4 Materiais e Métodos

Para a realização dos objetivos propostos seguiu-se o seguinte caminho metodológico:

1. Estudo dirigido e nivelamento: Na intenção do aluno desenvolver o ferramental matemático necessário

realizou-se um estudo dirigido sobre o Cálculo Variacional e os fundamentos da Mecânica Lagrangiana no livro-texto Dinâmica Clássica de partículas e sistemas (THORNTON; MARION, 2011). Utilizou-se o livro-texto Mecânica Analítica (LEMOS,) para complementação de Cálculo Variacional e o estudo de Teorias de Campos Clássicos.

2. Análise lagrangiana da gravitação newtoniana a G variável: Estudou-se a Equação (5) para consolidação do ferramental matemático. A partir disso, deu-se início ao estudo da Equação (8) e aplicação de um método perturbativo, consistente com a descrição do Sistema Solar, para encontrar o potencial gravitacional efetivo e, posteriormente, a equação aproximada da força gravitacional para um sistema de N corpos massivos;
3. Vinculação da lagrangiana geral com observações: Com a obtenção da força gravitacional pode-se obter a equação da força gravitacional com componente perturbativa. Através do método das órbitas osculantes (POISSON; WILL, 2014) obteve-se a variação de parâmetros keplerianos e a sua comparação com os dados observacionais para o avanço do periélio de Mercúrio permite estabelecer um vínculo para lagrangiana.

5 Resultados e Discussão

A lagrangiana (5) é um caso específico da forma generalizada (8) proposta no subprojeto da iniciação científica de que se trata este relatório,

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0} - \frac{\omega}{8\pi G_0} \left(f(\psi, \sigma) \dot{\sigma}^2 - g(\psi, \sigma) \vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma \right) + \rho h(\sigma) \psi. \quad (8)$$

Neste caso temos $f(\psi, \sigma)$ e $g(\psi, \sigma)$ como duas funções dependentes dos dois campos escalares e $h(\sigma)$ dependente somente do campo σ , portanto, temos um caso generalizado. Aplicamos então as equações de movimento de Euler-Lagrange à lagrangiana (8), pra obter as equações dinâmicas destes campos, equações (9) e (10) abaixo

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\sigma)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \quad (10)$$

Desenvolvendo as equações acima, encontramos

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega}{2} \left(\dot{\sigma}^2 f_\psi - g_\psi \vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma \right) = 4\pi G_0 \rho h(\sigma), \quad (11)$$

$$g(\psi, \sigma) \nabla^2 \sigma - f(\psi, \sigma) \ddot{\sigma} + \frac{g_\sigma}{2} (\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma) + g_\psi (\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\sigma) - \frac{f_\sigma}{2} \dot{\sigma}^2 = \frac{4\pi G_0}{\omega} \rho \psi h_\sigma, \quad (12)$$

na qual os símbolos f_σ , f_ψ , g_σ , g_ψ e h_σ indicam derivadas parciais das funções em relação ao campo que consta no subíndice. A partir daí fez-se uma análise perturbativa dessas equações considerando uma expansão em série dos campos.

5.1 Perturbação

5.1.1 Primeira ordem

Começamos com uma perturbação de primeira ordem apenas. Portanto, utilizou-se das seguintes substituições:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad (13)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1. \quad (14)$$

Neste caso, temos ψ_0 e σ_0 como constantes e ψ_1 e σ_1 dependentes das coordenadas espaciais e temporal. A ideia é que ψ_0 e σ_0 representam soluções exatas das equações de campo que descrevam a gravidade de um sistema global onde o sistema de interesse está inserido. Por exemplo, eles podem descrever um cenário cosmológico sob o qual está imerso o nosso Sistema Solar. Dessa forma, faz sentido assumir que são constantes, já que esses campos de fundo somente sofrerão variações consideráveis em uma escala de tempo e distância muito maiores do que a do sistema local. Assim, ψ_1 e σ_1 representam a gravidade gerada pelo sistema local. Além disso, assume-se $|\psi_0| \gg |\psi_1|$ e $|\sigma_0| \gg |\sigma_1|$, de modo que desprezamos termos quadráticos ou de ordem superior. Mais ainda, consideramos que derivadas temporais diminuem a ordem de grandeza dos campos, pois estamos considerando um sistema quase estacionário, onde as variações temporais dos campos são irrelevantes para ordem linear. Dessa forma, obtemos

$$\nabla^2 \psi_1 = 4\pi G_0 h_0 \rho, \quad (15)$$

e

$$\nabla^2 \sigma_1 = \frac{4\pi \psi_0 G_0 h_1}{\omega g_0} \rho, \quad (16)$$

sendo $g_0 = g(\psi_0, \sigma_0)$ e $h_1 = dh/d\sigma|_{\sigma=\sigma_0}$ termos constantes obtidos do desenvolvimento em séries de Taylor dessas funções.

Utilizou-se o Método das Funções de Green para encontrar as soluções de (15) e (16), que são

$$\psi_1(\vec{r}) = G_0 h_0 \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{e} \quad \sigma_1(\vec{r}) = \frac{\psi_0 h_1 G_0}{\omega g_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (17)$$

As integrais acima são, em essência, o potencial gravitacional newtoniano,¹

$$U = G_N \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{tal que} \quad \nabla^2 U = -4\pi G_N \rho, \quad (18)$$

e com G_N a constante gravitacional de Newton. Dessa forma, podemos escrever que

$$\psi_1 = -G_0 h_0 \frac{U}{G_N}, \quad \text{e} \quad \sigma_1 = -\frac{\psi_0 h_1 G_0}{\omega g_0} \frac{U}{G_N}. \quad (19)$$

¹Na verdade, U é o negativo do potencial newtoniano. Mas usamos essa notação para estarmos em consonância com as principais referências sobre análise pós-newtoniana, como por exemplo, a referência (POISSON; WILL, 2014).

Nota-se, portanto, que ambos os campos são diretamente proporcionais ao potencial newtoniano. Dessa forma, o potencial gravitacional efetivo da teoria, $U_{ef} = -\psi h(\sigma)$, “apenas” reproduzirá a gravitação universal de Newton em primeira ordem. Por um lado, isso é um resultado bom, uma vez que recuperamos a gravitação newtoniana na primeira ordem. Mas, por outro lado, queremos estudar as modificações trazidas pela teoria. Necessitamos, portanto, calcular os termos de segunda ordem na perturbação.

5.1.2 Segunda ordem

Para a análise de perturbação das equações (11) e (12) fazemos:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2, \quad (20)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2, \quad (21)$$

E usamos para ψ_1 e σ_1 as soluções encontradas na seção anterior. As equações dinâmicas para ψ_2 e σ_2 são

$$\nabla^2 \psi_2 = \frac{\omega}{2} g_{\psi_1} |\vec{\nabla} \sigma_1|^2 + 4\pi G_0 h_1 \sigma_1 \rho \quad (22)$$

e

$$\nabla^2 \sigma_2 = -\frac{g_{\sigma_1}}{2g_0} \left(|\vec{\nabla} \sigma_1|^2 + 2\sigma_1 \nabla^2 \sigma_1 \right) - \frac{g_{\psi_1}}{g_0} \left(\vec{\nabla} \psi_1 \cdot \vec{\nabla} \sigma_1 + \psi_1 \nabla^2 \sigma_1 \right) + \frac{4\pi G_0}{\omega g_0} (h_1 \psi_1 + h_2 \psi_0 \sigma_1) \rho. \quad (23)$$

As soluções dessas equações são obtidas usando o método de funções de Green, novamente. Nesse processo de integração, uma nova forma de potencial gravitacional aparece, a saber

$$\Phi_2 = G_N \int_V \frac{\rho(\vec{r}') U(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad \text{tal que} \quad \nabla^2 \Phi_2 = -4\pi G_N \rho U. \quad (24)$$

Esse potencial é muito comum em várias teorias gravitacionais relativísticas, como a própria Relatividade Geral. Por isso estamos mantendo a notação usual para representá-lo (incluindo o índice 2). Por fim, usando a identidade,

$$|\vec{\nabla} U|^2 = \nabla^2 \left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2 \right), \quad (25)$$

obtemos

$$\psi_2 = \frac{K_1}{2} U^2 - (K_1 + K_2) \Phi_2, \quad (26)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{h_0 g_0}{h_1 \psi_0^2} + \frac{h_2}{\omega g_0 h_1} - \frac{g_{\sigma_1}}{2\omega g_0} \right) \frac{2K_1}{g_{\psi_1}} \Phi_2 - \left(\frac{g_{\sigma_1}}{2\omega g_0 g_{\psi_1}} + \frac{h_0}{\psi_0 h_1} \right) K_1 U^2, \quad (27)$$

onde

$$K_1 = \frac{g_{\psi_1} \psi_0^2 h_1^2}{2\omega g_0^2} \left(\frac{G_0}{G_N} \right)^2, \quad (28)$$

$$K_2 = \frac{\psi_0 h_1^2}{\omega g_0} \left(\frac{G_0}{G_N} \right)^2, \quad (29)$$

$$K_3 = \frac{2h_0 K_1}{\psi_0 h_1} - \frac{h_0 h_1 G_0^2}{\omega g_0 G_N} \quad (30)$$

5.1.3 Potencial gravitacional efetivo

O potencial efetivo da teoria é dado por: $U_{ef} = -\psi h(\sigma)$, sendo este o termo que acompanha a fonte de campo ρ da (8). A forma do potencial efetivo para até a segunda ordem fica sendo

$$U_{ef} = -\psi_0 \sigma_0 + \frac{G_0}{G_N} \left(h_0 \sigma_0 + \frac{h_1 \psi_0^2}{\omega g_0} \right) U - \frac{\psi_0^2 h_1^2}{\omega g_0} \left(\frac{G_0}{G_N} \right)^2 \left(\frac{h_0}{h_1 \psi_0} - \frac{g_{\psi_1} h_0}{2g_0 h_1} + \frac{g_{\psi_1} \sigma_0}{4g_0} - \frac{g_{\sigma_1} \psi_0}{4g_0^2 \omega} \right) U^2 \\ + \frac{\psi_0^2 h_1^2}{\omega g_0} \left(\frac{G_0}{G_N} \right)^2 \left(\frac{h_0}{h_1 \psi_0} - \frac{\sigma_0}{\psi_0} - \frac{g_{\psi_1} \sigma_0}{2g_0} - \frac{g_{\sigma_1} \psi_0}{2\omega g_0^2} + \frac{h_2 \psi_0}{\omega g_0 h_1} \right) \Phi_2 \quad (31)$$

Para que a teoria reproduza a gravitação newtoniana em primeira ordem, devemos impor que

$$\left(\frac{\psi_0^2 h_1}{\omega g_0} + h_0 \sigma_0 \right) \frac{G_0}{G_N} = 1. \quad (32)$$

Para avançarmos na análise das consequências das modificações trazidas pela teoria, vamos nos restringir a uma classe de teorias onde a função g seja na verdade uma constante com unidades de velocidade à quarta potência. Com isso, os efeitos perturbativos de até segunda ordem estarão codificados na função de acoplamento h . Além disso, como estamos trabalhando com a hipótese de que as alterações na gravitação newtoniana devem ser pequenas, podemos assumir que $\omega \ll 1$. Com essas considerações, o potencial gravitacional fica sendo

$$U_{ef} = -\psi_0 \sigma_0 + U - \left(\frac{\omega g_0 h_0}{\psi_0^3 h_1} \right) U^2 + \left(\frac{h_2}{h_1 \psi_0} \right) \Phi_2. \quad (33)$$

5.2 Equação de movimento

Para encontrar a equação de movimento de um corpo A em um sistema de N corpos utiliza-se a a força atuando neste corpo,

$$\mathbf{f}_A = m_A \mathbf{a}_A = \int_{V_A} \rho(t, \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x. \quad (34)$$

A integral acima é feita sobre um volume que engloba o corpo A . Através da Equação de Euler, temos

$$\mathbf{f}_A = \int_A \rho(t, \mathbf{x}) \nabla U_{ef} d^3x, \quad (35)$$

já que o termo de pressão resulta em uma integral nula via teorema de Gauss.

Prosseguindo, separamos os potenciais em suas contribuições pelo corpo A e pelos demais corpos do sistema, assim

$$U = U_A + U_{\text{ext},A}, \quad (36)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2A} + \Phi_{2\text{ext},A} \quad (37)$$

Ambos são calculados como em (18) e (24), mas U_A é integrado sobre V_A enquanto o potencial externo é uma soma de integrais sobre o volume que envolve cada um dos corpos restantes do sistema. Ao considerar que a densidade de cada corpo reflete simetricamente em relação ao seu centro de massa, é possível mostrar que apenas as partes externas contribuem para a força. Além disso, estes termos podem ser removidos da integral em (35) assumindo que os corpos estão muito afastados entre si (que é o caso do sistema solar). Dessa forma os potenciais externos não dependerão da variável de integração como primeira aproximação.² Com essas considerações, a força sobre um corpo A fica sendo

$$f_A^j = m_A \frac{\partial U_{\text{ext},A}}{\partial x^j} - d_2 m_A \frac{\partial \Phi_{2\text{ext},A}}{\partial x^j} - \frac{\partial U_{\text{ext},A}}{\partial x^k} \left[2d_1 m_A U_{\text{ext},A} \delta_{jk} - 4d_1 \Omega_A \delta_{jk} + (2d_1 - d_2) \Omega_A^{jk} \right] \quad (38)$$

onde

$$m_A = \int_A \rho(t, \mathbf{x}) d^3 x, \quad (39)$$

$$\Omega_A^{jk} = -\frac{G_N}{2} \int_A \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}') (x^j - x'^j)(x^k - x'^k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x d^3 x', \quad (40)$$

$$d_1 = \frac{\omega g_0 h_0}{\psi_0^3 h_1}, \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{h_2}{h_1 \psi_0}. \quad (41)$$

O traço do tensor Ω_A^{jk} , representado por Ω_A , é a energia potencial gravitacional do corpo A.

Uma vez que assumimos que os corpos estão bem afastados um dos outros, os potenciais externos podem ser expandidos em séries de Taylor [ver, por exemplo, (POISSON; WILL, 2014, pp. 437)],

$$U_{\text{ext},A} = \sum_{B \neq A} \frac{G_N m_B}{r_{AB}}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ext},A}}{\partial x^j} = - \sum_{B \neq A} \frac{G_N m_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^j, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{ext},A}}{\partial x^j} = 2 \sum_{B \neq A} \frac{G_N \Omega_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^j - \sum_{B \neq A} \frac{G_N^2 m_A m_B}{r_{AB}^3} \hat{r}_{AB}^j - \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A, B} \frac{G_N^2 m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{BC}} \hat{r}_{AB}^j. \quad (44)$$

²Os resultados para a integral da divergência de cada potencial já são conhecidos. A referência (POISSON; WILL, 2014) apresenta uma exposição bem detalhada desses cálculos. Embora seja usada uma definição distinta para a densidade de massa (já que a densidade conservada na relatividade geral é dada por $\rho^* = \rho \sqrt{-g}$, sendo g a métrica do espaço-tempo), seus resultados ainda são válidos no contexto newtoniano uma vez que aqui ρ é a densidade que satisfaz uma equação de continuidade.

Nas expressões acima foram usadas as seguintes notações: $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ e $\hat{r}_{AB} = \vec{r}_{AB}/r_{AB}$. Ao substituir tais expressões em (38), teremos mais de um termo de força dependendo do inverso do quadrado da distância entre os corpos. Tais correções representam uma manifestação da diferença entre massa inercial e as massas gravitacionais passiva e ativa. Estas quantidades, que são todas iguais na teoria newtoniana usual, são representadas pela seguinte expressão geral

$$f_A^j = \sum_{k=1}^3 (\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A^{jk} a_A^k = - \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (\mathcal{M}_{\mathcal{P}})_A^{lm} \sum_{B \neq A} \frac{G_N (\mathcal{M}_{\mathcal{A}})_B^{mn}}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^l \hat{r}_{AB}^n \hat{r}_{AB}^j. \quad (45)$$

Dessa forma, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é a quantidade de massa que gera um potencial gravitacional: a *massa gravitacional ativa*; $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ é o termo de massa que relaciona a força com o gradiente do potencial: a *massa gravitacional passiva*; e a *massa inercial*, ou seja, a relação entre força e aceleração, é representada por $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$. Os índices latinos representam as coordenadas espaciais, por isso são somados de 1 a 3. No modelo que estamos analisando, teremos,

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A^{jk} = (m_A - 2d_1 \Omega_A) \delta^{jk} + (2d_1 - d_2) \Omega_A^{jk}, \quad (46)$$

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})_A^{jk} = (m_A + 2d_1 \Omega_A) \delta^{jk} \equiv (\mathcal{M}_{\mathcal{P}})_A \delta^{jk}, \quad (47)$$

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})_B^{jk} = (m_B + 2d_2 \Omega_B) \delta^{jk} \equiv (\mathcal{M}_{\mathcal{A}})_B \delta^{jk}. \quad (48)$$

Portanto, a forma final da equação de movimento de um corpo A , na primeira ordem pós-Newtoniana, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A^{jk} a_A^k = & - (\mathcal{M}_{\mathcal{P}})_A \sum_{B \neq A} \frac{G_N (\mathcal{M}_{\mathcal{A}})_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^j + \sum_{B \neq A} \frac{G_N^2 m_A m_B}{r_{AB}^3} (d_2 m_A + 2d_1 m_B) \hat{r}_{AB}^j \\ & + \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A, B} \frac{G_N^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^3} \left(\frac{2d_1}{r_{AC}} + \frac{d_2}{r_{BC}} \right) \hat{r}_{AB}^j. \end{aligned} \quad (49)$$

O objetivo deste trabalho é analisar o impacto das modificações trazidas pela teoria newtoniana com constante gravitacional variável sobre a variação secular dos parâmetros orbitais keplerianos, em especial o argumento do periélio. Para isso, consideramos um sistema binário (Sol e planeta), simplificando (49). Nesses casos, a distinção entre massa inercial, massa gravitacional passiva e massa gravitacional ativa não pode ser medida, o que nos permite substituir todos os \mathcal{M} por m . Como todo sistema binário, simplificamos ainda mais se olharmos para a aceleração relativa dos corpos, $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Portanto, o sistema binário pode ser interpretado como uma única partícula de massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / m$ movendo-se no campo gravitacional gerado por um corpo de massa $m = m_1 + m_2$. Sob essas condições, obtemos,

$$\mathbf{f} = - \frac{G_N m \mu}{r^2} \left(1 + \frac{2G_N}{r} [d_1 m - 2(2d_1 - d_2) \mu] \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (50)$$

com $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$ sendo a distância relativa entre os dois corpos.

5.3 Variação de elementos orbitais

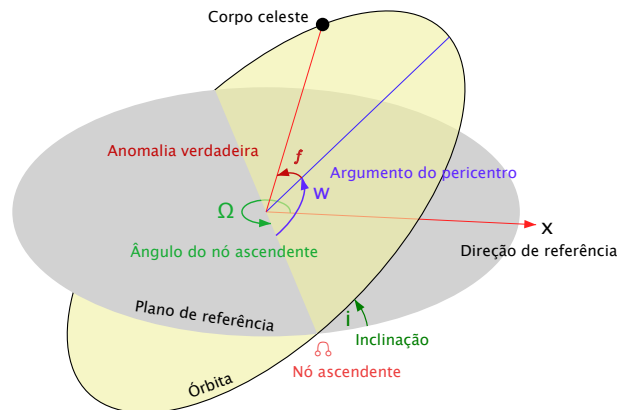
Devido a modificação realizada na força gravitacional, a órbita desenvolvida por uma partícula teste interagindo com uma fonte não será elíptica. Neste caso, os parâmetros Keplerianos sofrem variações que influenciam diretamente na trajetória das partículas e na órbita. Tomando a nova forma da força gravitacional, podemos utilizá-la como efeito perturbativo para obter a variação dos parâmetros Keplerianos, visto que, através do Teorema do Virial, observa-se $G_N m/r \approx v^2$, sendo v a velocidade orbital típica. Esta correção do potencial Newtoniano comum deve tratar a velocidade sendo da ordem de v^2/c^2 , sendo pequeno o suficiente para órbitas de satélites e planetas.

Tomando um sistema de duas partículas de massa m_1 e m_2 e adotando o centro de massa na origem do sistema de coordenadas, obtém-se uma equação cônica da trajetória da posição relativa entre as partículas dada pela Equação (51),

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (51)$$

Sendo e a excentricidade da elipse, a o semi-eixo maior e f a anomalia verdadeira, sendo este o ângulo orbital com relação ao pericentro. Para relacionar as modificações na força gravitacional com os dados observacionais é necessário descrever o movimento com relação ao plano orbital da Terra, que requer o uso de novos parâmetros, sendo eles a inclinação orbital i , o ângulo Ω entre o nó ascendente, a direção de referência dentro do plano orbital de referência e o parâmetro do pericentro w (veja a Figura 1).

Figura 1: Movimento orbital decomposto em um plano de referência.



Fonte: Lasunncty, através de [Wikimedia commons](#), alterada pelos autores.

Para determinar a variação dos parâmetros Keplerianos utilizou-se o método das órbitas osculantes. Neste método, a partícula percorre uma trajetória elíptica a cada instante de tempo, sendo que os parâmetros orbitais que definem a elipse variam conforme o tempo, ou seja, a cada instante a partícula se movimenta em uma elipse diferente. A mudança nos parâmetros orbitais ocorre devido a componente radial orbital da força perturbativa R , uma componente W normal ao plano da órbita e uma componente S perpendicular às direções anteriores.

A força encontrada na equação (50) possui uma contribuição Newtoniana e uma contribuição perturbativa, sendo

esta a componente radial perturbativa de interesse, escrita como

$$R = \frac{2G_N^2 m \mu}{r^3} [d_1 m - 2(2d_1 - d_2) \mu]. \quad (52)$$

A aceleração perturbativa causa variações na excentricidade e no argumento do pericentro, de acordo com as equações abaixo (POISSON; WILL, 2014, p. 160)

$$\frac{dw}{df} = -\frac{a^2(1-e^2)^2}{eG_N m \mu} \frac{\cos f}{(1+e \cos f)^2} R, \quad (53)$$

$$\frac{de}{df} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{G_N m \mu} \frac{\sin f}{(1+e \cos f)^2} R. \quad (54)$$

A partir disso, utilizando a Equação (51), integra-se em um período orbital completo, obtendo as relações

$$\Delta w = -2\pi G_N m \frac{d_1 - 2(2d_1 - d_2)(\mu/m)}{ae(1-e^2)}, \quad (55)$$

$$\Delta e = 0. \quad (56)$$

Observa-se que somente o argumento do pericentro w varia de forma cumulativa a cada período, indicando que a excentricidade das elipses se mantém. Pode-se descrever a variação por órbita obtida em termos da variação temporal dividindo a Equação (55) por um período P . Baseado na terceira lei de Kepler, utiliza-se o período $P = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{G_N m}$, resultando em uma variação secular,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{sec}} = \frac{(G_N m)^{3/2}}{a^{5/2} e (1-e^2)} [d_1 - 2(2d_1 - d_2)(\mu/m)] \quad (57)$$

Nosso foco é utilizar a expressão acima para o sistema Sol-Mercúrio e verificar as condições sobre as constantes livres para que a teoria explique corretamente o avanço do periélio desse planeta. Sendo μ a massa reduzida e tendo sua ordem de grandeza $\approx 10^{23}$ kg, ou seja, aproximadamente a massa de Mercúrio, e m a massa total do sistema sendo da ordem de $\approx 10^{30}$ kg, ou seja, basicamente a massa do Sol, pode-se descartar os termos que acompanham a relação μ/m . Com isso, utilizando os dados da sonda MESSENGER para o avanço do periélio de mercúrio sendo $(dw/dt)_{\text{sec}} = (42,9799 \pm 0,0009)''/\text{século}$ (PARK et al., 2017) e os valores de $G_N = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$, a massa do Sol $m = 1,988 \times 10^{30}$ kg e os parâmetros da órbita de mercúrio $e = 0,205631$ e $a = 57,909 \times 10^9$ m, respectivamente a excentricidade e o semi-eixo maior. Obtemos assim um valor estimado para d_1 de

$$d_1 = 6,87 \times 10^{-18} (\text{m/s})^{-2}. \quad (58)$$

Lembrando que $d_1 = \omega g_0 h_0 / \psi_0^3 h_1$, um modelo teórico que esteja de acordo com as observações para o avanço do periélio de Mercúrio deve ter suas funções g e h satisfazendo a relação acima.

6 Considerações finais

Este trabalho visou estudar uma classe de teorias alternativas da gravitação newtoniana com acoplamento variável produzido a partir de dois campos escalares, ψ e σ . Foi realizado um estudo dos fundamentos matemáticos sobre Cálculo Variacional, Princípio de Hamilton e Teoria Clássica de Campos. Com os conhecimentos adquiridos utilizou a Equação de Euler-Lagrange para encontrar as equações dinâmicas dos campos ψ e σ .

Com os resultados obtidos aplicamos uma Teoria de Perturbação consistente para um sistema de campo gravitacional fraco e quase estático. Com as perturbações feitas determinou-se o potencial gravitacional efetivo e através dele obteve-se a equação da força gravitacional para um sistema de N corpos. Nesse processo, verificou-se que essas teorias reproduzem a gravitação newtoniana na primeira ordem aproximativa e as correções trazidas na ordem não linear podem produzir efeitos que diferenciem as massas inercial, gravitacional passiva e gravitacional ativa. Esse é um aspecto que requer estudo futuro e não estava no escopo de nosso projeto.

A partir disso, foi utilizado o método das órbitas osculantes para compreender como os parâmetros keplerianos variam com o tempo nessa teoria newtoniana modificada. Foi observado que somente o argumento do pericentro orbital varia com relação a anomalia verdadeira e de forma acumulativa. Vimos, por fim, que os dados observacionais de Mercúrio pode vincular parte da lagrangiana dessa classe de teorias. A perspectiva futura é investigar mais detalhadamente essa classe de teorias com outros dados observacionais, de forma que seja possível restringir mais a lagrangiana.

Referências

- CHRISTODOULOU, D. M.; KAZANAS, D. Interposing a varying gravitational constant between modified Newtonian dynamics and weak Weyl gravity. **Mon. Not. R. astr. Soc. Lett.**, v. 479, n. 1, p. L143–L147, 2018. ISSN 1745-3925.
- DUVAL, C.; GIBBONS, G. W.; HORVATHY, P. Celestial mechanics, conformal structures and gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 43, p. 3907–3922, 1991.
- FABRIS, J. C.; OTTONI, T.; TONIATO, J. D.; VELTEN, H. Stellar structure in a newtonian theory with variable g . **Physics**, v. 3, n. 4, p. 1123–1132, 2021. ISSN 2624-8174.
- LANDSBERG, P. T.; BISHOP, N. T. A Principle of Impotence Allowing for Newtonian Cosmologies with a time-Dependent Gravitational Constant. **Mon. Not. R. astr. Soc.**, v. 171, n. 2, p. 279–286, 05 1975. ISSN 0035-8711.
- LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. 2. ed. [S.l.: s.n.].
- LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Livraria da Física, 2007. ISBN 9788588325241. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>.
- MCVITTIE, G. C. Newtonian cosmology with a time-varying constant of gravitation. **Mon. Not. R. astr. Soc.**, v. 183, n. 4, p. 749–764, 08 1978. ISSN 0035-8711.
- PARK, R. S. et al. Precession of mercury’s perihelion from ranging to the messenger spacecraft. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 153, n. 3, p. 121, feb 2017. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/aa5be2>.

POISSON, E.; WILL, C. M. **Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic**. Nova York: Cambridge University Press, 2014.

REIS, R. R. R.; SIFFERT, B. B. Supernovas do tipo ia e a expansão do universo. **Cadernos de Astronomia**, v. 3, n. 1, p. 21 – 32, fev. 2022.

RODRIGUES, D. C.; HERNÁNDEZ-ARBOLEDA, A. Rotação de galáxias e matéria escura. **Cadernos de Astronomia**, v. 2, n. 1, p. 6 – 33, 2021.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage, 2011.

VELTEN, H. Matéria escura, energia escura e a busca por uma nova teoria para a gravitação. **Cadernos de Astronomia**, v. 1, n. 1, p. 40 – 51, jul. 2020.